

Determinante di una ~~matrice~~ ^{lineare} di n vettori di $\mathbb{K}^n$
 come l'unica funzione che, dati i vettori,
 restituisce la matrice per colonne.

$$d: \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$$

che

$$1) \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$2) \det(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n) \text{ con } \bar{c}_1 \dots \bar{c}_n \text{ colonne} \\ = 0 \quad \text{se } \exists i: \bar{c}_i = 0$$

$$3) \det(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n) \text{ con } \bar{c}_1 \dots \bar{c}_i \dots \bar{c}_i \dots \bar{c}_n = \\ = \det(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_i + \bar{c}_j \dots \bar{c}_i \dots \bar{c}_n) \quad \forall j \neq i$$

$$4) \det(\alpha \bar{c}_1 + \beta \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n) = \alpha \det(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_i \dots \bar{c}_n) + \\ + \beta \det(\bar{c}_2 \dots \bar{c}_i \dots \bar{c}_n) \\ \text{con } d \text{ vettore di } \mathbb{K}^n.$$

equivalenze

1) $\det I = 1$

2) Se $\exists i; j$ con $i \neq j$ tali che $c_i = c_j \Rightarrow$
 $\Rightarrow \det(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n) = 0$

3) ~~$\det(c_1 \dots c_n) = \det(c_1 \dots \alpha c_i + \beta d_i \dots c_n) =$~~

$$= \alpha \det(c_1 \dots c_i \dots c_n) + \beta \det(c_1 \dots d_i \dots c_n) \quad A_{i:}$$

$\exists!$ funzione che soddisfa queste proprietà:

(esiste una unica funzione n -multilivellare
alternante che vale 1 sulla base canonica).

Se M = matrice arbitraria $\Rightarrow$ possiamo provare
un valore ξ tale che $\det(M) = \det(I)$.

$\rightarrow$ Trasformiamo la matrice M nella matrice identità
mediante operazioni elementari nelle colonne
e vediamo come di come varia il $\det$ di
conseguenza.

$$M \rightarrow M'$$

1) Sommare ad una colonna
una c. lineare della
minimamente

$$\det(M) = \det(M')$$

2) Scambiare fra loro 2 colonne

$$\det(M) = -\det(M')$$

3) Moltiplicare una colonna per uno
scalare $\alpha \neq 0$

$$\det(M) = \alpha \det(M')$$

COLUMN LIFT

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$n_0 = 1$$

$m_{ii} = 0$ se $\exists i: m_{ii} \neq 0 \rightarrow$ scandiamo
I e i-esime
columns

$$n_0 \leftarrow n - (-1)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

divido la
I columns
per $m_{11} \neq 0$

$$n_0 \leftarrow m_{11}^{+1} \cdot n_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

ad ogni
columna $i \neq 1$
sottraggio m_{1i} volte la prima

$$n_0 \leftarrow n_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$m_{12} = 0 \Rightarrow \exists i > 2: m_{i2} \neq 0 \Rightarrow \text{смена}$
 column 2 & column i
 $k_0 \leftarrow k_0(-1).$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

divi
 la seconda
 column
 per m_{22}
 $k_0 \leftarrow k_0 \cdot m_{22}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & \dots & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

shift
 ad ogni column i?
 m_{2i} & II column
 $k \leftarrow k.$

Quante operazioni?

- n colonne da sistemare
- per ogni colonna n prodotti di n entrate
 $\approx n^3$ prodotti da calcolare + somme.

Teorema di Laplace:

$$M \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow \text{se } M \in \mathbb{K}^{3,2} \Rightarrow \det(m_{11}) = m_{11}$$

Altrimenti

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n m_{ij} (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad \forall j$$

ove M_{ij} = matrice ottenuta da M cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna

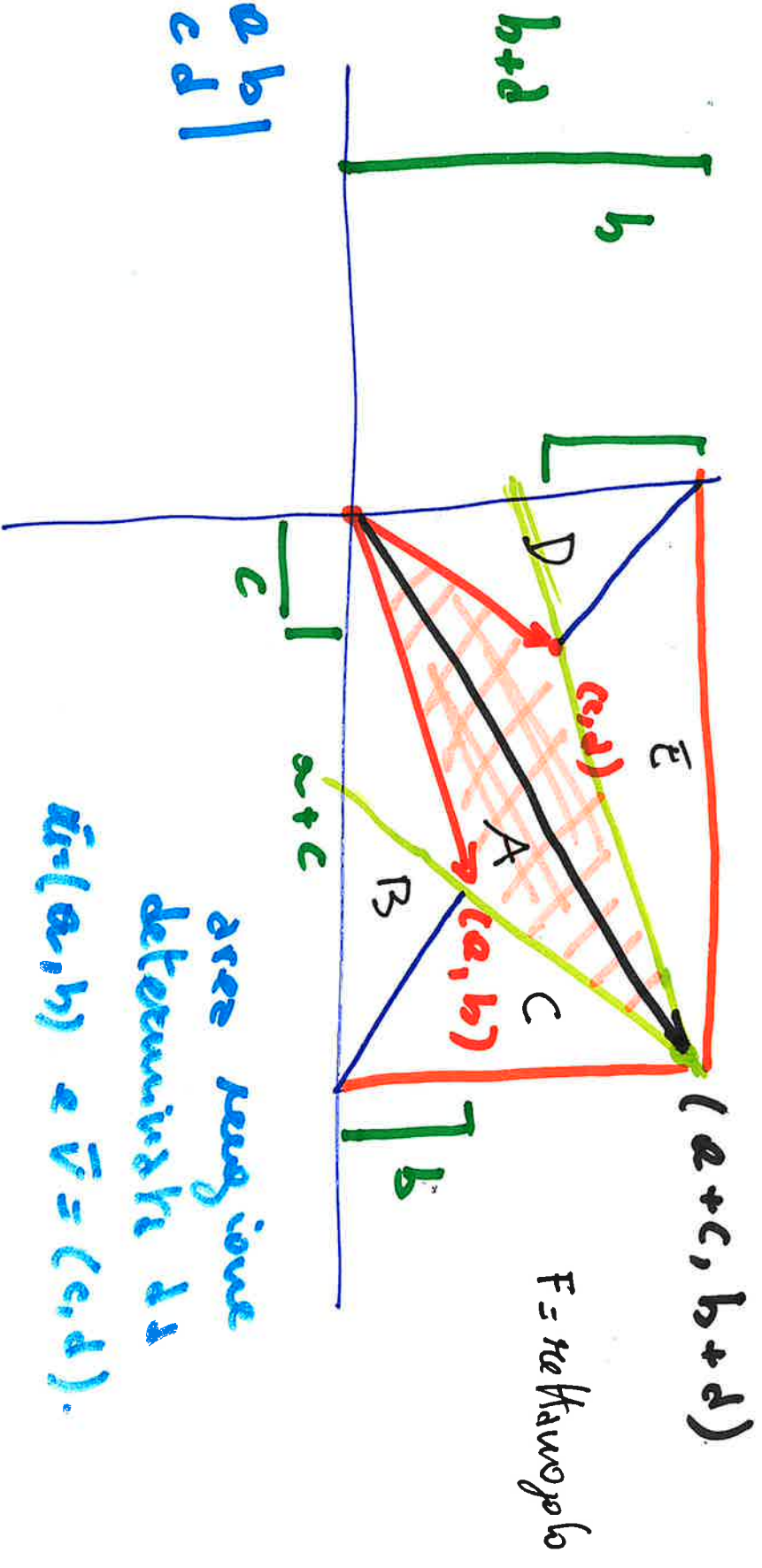
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

N.B. Il calcolo di una det. con Laplace richiede $\approx n!$ operazioni.

$M \in \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow$ vi servono n det. di matrici $\in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ di quest. servono $n-1$ det. di matrici $\in \mathbb{K}^{(n-2) \times (n-2)}$...

der hat eine intuitive geometrische.



$$* = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

area regions
determining is
 $\vec{u} = (a, b)$ & $\vec{v} = (c, d)$.

$$\text{Area}(A) = \text{Area}(F) - \text{Area}(B) - \text{Area}(C) - \text{Area}(D) - \text{Area}(E).$$

$$\begin{aligned} & (a+c) \cdot (b+d) - 2 \frac{(a+c)b}{2} - 2 \frac{(b+d)c}{2} = \\ & ab + ad + cb + cd - ab - cb - bc - dc = ad - bc = * \end{aligned}$$

Sia $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ una applicazione lineare
e sia A_f la sua matrice rispetto la base
canonica.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

A_f ha come colonne le immagini

dei vettori della base
canonica rispetto f .



$\det(A_f)$ = "ipercolume"
del solido deformato
dalla immagine dei
vettori della base can.
mediante f .

Teorema di Binet: Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

f di matrice $B \rightarrow$ scala per $\det(B)$
 g di matrice $A \rightarrow$ scala per $\det(A)$
gli invertimenti
 $\Rightarrow (f \circ g)$ ha matrice AB

Siano A, B due matrici simili $\Rightarrow \det(A) = \det(B)$.

$$\begin{aligned} \det \exists D \in GL(n, \mathbb{K}) : A &= D^{-1} B D \Rightarrow \\ \Rightarrow \det(A) &= \det(D^{-1} B D) = \\ &= \det(D^{-1}) \det(B) \det(D) = \\ &= \det(D)^{-1} \det(B) \det(D) = \det B \quad \square \end{aligned}$$

oss: $A \in GL(n, K)$

$(A \text{ invertibile}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Inoltre $A \text{ invertibile} \Leftrightarrow \text{rank Ker}(A) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \det(A) = 0$ in quanto $\text{Ker}(A) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim \text{Im}(A) = n \Leftrightarrow$ le colonne di A
sono una base e dunque lin. indipendenti.

DATO A con $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ Trovare A^{-1}

2 possibilità

$\swarrow$ Laplace
Gauss-Jordan.

Algoritmo di Gauss per calcolo inverso.

M $\xrightarrow{\quad} I$
matrice $\xrightarrow{\quad}$ con op.
con dato $\xrightarrow{\quad}$ elementi

supponiamo di avere l'elenco di tutte le op.

elementari che abbiamo eseguito per andare da M ad I e che ognuna di queste op. si rappresenta moltiplicando una matrice.

$\Rightarrow$ il prod. di tutte queste matrici corrisponde ad una matrice M' tale che $MM' = I$
e quindi $M' = M^{-1}$

1) Moltiplicare una colonna per $\alpha \Rightarrow$

poniamo

$$R_{k,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} =$$

= matrice che ha $\begin{matrix} 1 & \text{se } i=j \neq k \\ \alpha & \text{se } i=j=k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{matrix}$

$$M = [c_1 \dots c_n] R_{k,\alpha} = [c_1 \dots \alpha c_k \dots c_n]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Scambiare due colonne ℓ, m Prendiamo la matrice che ha ordine 1 se $i=j, i \neq \ell, m$

$$1 \leq i \leq m, j = m$$

$$n \quad i = m, j = l$$

$$\sum_{ij}$$

o altre.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Supponiamo di voler passare ad una colonna i
il valore di un'altra. (La j-esima).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Prendiamo T_{ij} data da

Matrice identità + matrice che ha 1
soltanto in posizione (j, i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$(3, 2)$

↑
II column

+
III column

Partiamo da una matrice M ed una copia della matrice identica

$$\begin{array}{ccc} M & | & I \\ \vdots & & \vdots \end{array} \quad \text{E.s.o}$$

applichiamo le medesime operazioni ad M ed alla copia di I fino ad arrivare ad avere

$$\begin{array}{ccc} I & | & M' \end{array}$$

M' derivare questo mi è fatto $\Rightarrow MM' = I \Rightarrow M' = M^{-1}$